정답표와 예상 등급컷

정답표

공통과목

1번 ① / 2번 ② / 3번 ④ / 4번 ⑤ / 5번 ③

6번 ⑤ / 7번 ④ / 8번 ① / 9번 ③ / 10번 ②

11번 ② / 12번 ⑤ / 13번 ③ / 14번 ④ / 15번 ①

16번 11 / 17번 14 / 18번 79 / 19번 6 / 20번 11

21번 283 / 22번 22

확률과 통계

23번 ② / 24번 ④ / 25번 ② / 26번 ⑤ / 27번 ③

28번 ① / 29번 14 / 30번 29

미적분

23번 ① / 24번 ⑤ / 25번 ② / 26번 ⑤ / 27번 ③

28번 ① / 29번 199 / 30번 3

기하

23번 ① / 24번 ④ / 25번 ② / 26번 ④ / 27번 ③

28번 ① / 29번 53 / 30번 141

예상 등급컷

공통과목과 선택과목을 합한 100점 만점 원점수 기준입니다.

선택과목	1등급	2등급	3등급
확률과 통계	88점	80점	72점
미적분	84점	76점	68점
기하	86점	78점	70점

위 점수는 문항 구성과 예상 풀이 부담을 바탕으로 정한 제작자 예상치입니다. 실제 응시 결과에 따라 달라질 수 있습니다.

공통과목 해설

1번 | 정답 ① | 2점

R1. 밑을 2로 통일

조건

밑은 모두 양수이다.

사용 과정

$16^{3/4} = (2^4)^{3/4} = 2^3$이고, $2^3 \div 2^{-1} = 2^4$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 16이다.

2번 | 정답 ② | 2점

R1. 각 항을 미분

조건

구하는 것은 x=2에서의 미분계수이다.

사용 과정

$f'(x) = 6x^2 - 10x$이므로 $f'(2) = 24 - 20$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 4이다.

공통과목 3번 해설

3번 | 정답 ④ | 3점

R1. 공차와 항 구하기

조건

$a_7 - a_2$는 공차의 5배이다.

사용 과정

공차를 d라 하면 $5d = 15$, $d = 3$이다. 따라서 $a_{10} = a_7 + 3d = 20 + 9$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 29이다.

4번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 분자의 영점 조건 사용

조건

분모가 0으로 가는데 극한값은 유한하다.

사용 과정

$4 + 2a + b = 0$이고 분자를 $(x-2)(x+a+2)$로 쓰면 극한은 $a + 4 = 5$이다. 따라서 $a = 1$, $b = -6$이다.

결과 · 다음 연결

$a - b = 7$이다.

공통과목 5번 해설

5번 | 정답 ③ | 3점

R1. 사분면으로 부호 결정

조건

제2사분면에서 코사인과 탄젠트는 음수이다.

사용 과정

$\cos\theta = -4/5$, $\tan\theta = -3/4$이므로 주어진 식은 $-4-3$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 -7이다.

6번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 극값 조건에서 두 식을 얻는다

조건

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx$가 $x = 1$에서 극값 4를 갖는다.

사용 과정

$f(1) = 4$에서 $a + b = 3$이고, $f'(1) = 0$에서 $2a + b = -3$이다. 두 식을 빼면 $a = -6$, $b = 9$이다.

결과 · 다음 연결

$f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$이다.

공통과목 6번 해설

R2. 극댓값 조건과 목표를 확인한다

조건

$f'(x)=3(x-1)(x-3)$이다.

사용 과정

$x=1$의 좌우에서 부호가 양수에서 음수로 바뀌므로 극댓값 조건을 만족한다.
$f(2)=8-24+18$이다.

결과 · 다음 연결

답은 2이다. 목표값은 $a+b$만으로 결정되지 않으므로 미분 조건도 사용된다.

7번 | 정답 ④ | 3점

R1. 절댓값 경계에서 나누기

조건

x=1을 전후하여 2x-2의 부호가 바뀐다.

사용 과정

구간 $[-1,1]$에서는 $2-2x$, $[1,2]$에서는 $2x-2$를 적분한다. 두 넓이는 각각 4와 1이다.

결과 · 다음 연결

따라서 5이다.

공통과목 8번 해설

8번 | 정답 ① | 3점

R1. 연속한 합의 공비 이용

조건

공비를 r이라 하면 두 번째 합은 첫 번째 합의 r배이다.

사용 과정

$r=54/18=3$이다. $a_2+a_3=a_1(3+9)=18$이므로 $a_1=3/2$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $3/2$이다.

9번 | 정답 ③ | 4점

R1. 접점을 문자로 놓아 통과 조건 쓰기

조건

지나야 하는 점은 $(1,-2)$이며 접점은 아직 모른다.

사용 과정

접점의 x좌표를 t라 놓으면 기울기는 $3t^2-3$이다. 접선은 $y=(3t^2-3)(x-t)+t^3-3t$이다. 점을 대입하면 $2t^3-3t^2+1=0$이다.

결과 · 다음 연결

$(t-1)^2(2t+1)=0$이므로 $t=1,\ -1/2$이다.

공통과목 9번 해설

R2. 중복 접점과 서로 다른 직선 확인

조건

중근 t=1은 같은 접선을 두 번 세는 이유가 되지 않는다.

사용 과정

두 기울기는 0과 $3/4-3=-9/4$이다. 서로 다르므로 접선도 두 개이다.

결과 · 다음 연결

기울기의 합은 $-9/4$이다.

10번 | 정답 ② | 4점

R1. 단사성으로 교점 복원

조건

두 로그식의 밑이 같고 진수는 양수이다.

사용 과정

$x=8-x$이므로 $x=4$, $y=2$이다.

결과 · 다음 연결

A는 $(4,2)$이다.

R2. 직선의 절편 계산

조건

기울기 -1과 점 $(4,2)$를 안다.

사용 과정

$y-2=-(x-4)$, 즉 $y=-x+6$이다. y=0을 넣는다.

결과 · 다음 연결

x절편은 6이다.

공통과목 11번 해설

11번 | 정답 ② | 4점

R1. 각 조건에서 작은 삼각형의 비 찾기

조건

D가 BC 위이므로 각 ABD와 ABC도 같다.

사용 과정

삼각형 ABD와 CBA는 두 각이 같아서 닮음이다. 대응변 AB와 CB의 비는 1:2이다. 따라서 $\mathrm{BD} = \mathrm{BA}/2 = 2$, $\mathrm{DC} = 6$이다.

결과 · 다음 연결

같은 높이를 갖는 ADC와 ABC의 넓이 비는 6:8이다.

R2. 전체 넓이와 비 결합

조건

AB, AC, BC의 길이를 안다.

사용 과정

코사인법칙에서 $\cos \mathrm{A} = (16 + 36 - 64)/48 = -1/4$이므로 $\sin \mathrm{A} = \sqrt{15}/4$이다. ABC의 넓이는 $4 \cdot 6 \cdot \sqrt{15}/8 = 3\sqrt{15}$이다.

결과 · 다음 연결

구하는 넓이는 $3\sqrt{15} \times 3/4 = 9\sqrt{15}/4$이다.

공통과목 12번 해설

12번 | 정답 ⑤ | 4점

R1. 적분식을 미분해 함수 찾기

조건

모든 x에서 성립하는 적분 항등식이다.

사용 과정

양변을 미분하면 $f(x)=3x^2+2ax$이다. $f(1)=7$에서 $a=2$이다.

결과 · 다음 연결

원시함수는 x^3+2x^2이다.

R2. 필요한 구간의 차 구하기

조건

정적분은 원시함수의 끝값 차이다.

사용 과정

$(8+8)-(1+2)=13$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 13이다.

13번 | 정답 ③ | 4점

R1. 세 조건에서 계수 정하기

조건

$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$라 놓는다.

사용 과정

$1+a+b+c=2$, $3+2a+b=0$, $-1+a-b+c=6$을 풀면 $a=0, b=-3, c=4$이다.

결과 · 다음 연결

$f(x)=x^3-3x+4$이다.

공통과목 13번 해설

R2. 접선과의 교점 및 부호 유지

조건

$f(x)-2=x^3-3x+2$이다.

사용 과정

$(x-1)^2(x+2)$로 인수분해되므로 교점의 x좌표는 -2,1이다. 그 사이에서 식은 0 이상이다. 넓이는 $\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)dx$이다.

결과 · 다음 연결

원시함수 $x^4/4-3x^2/2+2x$에 끝값을 넣으면 27/4이다.

14번 | 정답 ④ | 4점

R1. 같은 지수의 거듭제곱으로 좌표 압축

조건

두 점의 x좌표가 u와2u이다.

사용 과정

$w=a^u$라 놓으면 $w>1$, A=(u,w), B=(2u,w^2)이다. 직선 조건은 $w=6u-k$, $w^2=12u-k$이다.

결과 · 다음 연결

두 식에서 $6u=w^2-w$, $k=w^2-2w$이다. k>0이므로 w>2이다.

R2. 넓이와 기울기 조건 합류

조건

w>2이므로 넓이식의 부호가 정해진다.

사용 과정

넓이는 $u(w^2-2w)/2=8$이다. $u=(w^2-w)/6$을 넣으면 $w^2(w-1)(w-2)=96$이다.

결과 · 다음 연결

좌변은 w>2에서 엄격히 증가하고 w=4일 때96이다. 따라서 w=4이다.

공통과목 14번 해설

R3. 지수의 밑과 절편 복원

조건

6u=12, k=8이다.

사용 과정

u=2이고 $a^2=w=4$이다. a>1에서 a=2이므로 $a^3+k=8+8$이다. 좌표$(2,4),(4,16)$은 원래 직선과 넓이조건에 맞는다.

결과 · 다음 연결

정답은 16이다.

15번 | 정답 ① | 4점

R1. 도함수의 두 영점에서 함수 모양 복원

조건

도함수는 최고차항 계수 3인 이차식이다.

사용 과정

$f'(x)=3(x+a)(x-a)$이므로 $f(x)=x^3-3a^2x+b$이다. 두 극값의 합은 2b이므로 $b=2$이다.

결과 · 다음 연결

극댓값은 $2+2a^3$, 극솟값은 $2-2a^3$이다.

R2. 서로 다른 다섯 실근이 되는 경계 결정

조건

$|f(x)|=1$은 $f(x)=1$ 또는 $f(x)=-1$이다.

사용 과정

극댓값은 항상 2보다 크다. 극솟값이 -1보다 작으면 각 수평선과 3번 만나 총6개이다. 극솟값이 -1이면 각각3개와2개로 총5개이다. -1보다 크면 총4개 이하이다.

결과 · 다음 연결

$2-2a^3=-1$에서 $2a^3=3$이다.

공통과목 15번 해설

R3. 목표값만 계산

조건

a 자체의 근삿값은 필요하지 않다.

사용 과정

$f(2a)=8a^3-6a^3+2=2a^3+2$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 5이다.

16번 | 정답 11 | 3점

R1. 곱과 거듭제곱의 로그

조건

a, b는 양수이다.

사용 과정

$\log_2(a^2b)=2\log_2 a+\log_2 b=2\cdot 3+5$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 11이다.

공통과목 17번 해설

17번 | 정답 14 | 3점

R1. 원시함수의 끝값 차

조건

다항식의 항별 적분을 사용한다.

사용 과정

원시함수는 x^3+x^2+x이므로 정적분은 $8+4+2$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 14이다.

18번 | 정답 79 | 3점

R1. 합에서 일반항 복원

조건

$a_1=S_1=3$이며 $n\ge 2$에서 $a_n=S_n-S_{n-1}$이다.

사용 과정

차를 계산하면 $a_n=2n+1$이고 첫째항도 이 식에 맞는다.

결과 · 다음 연결

$a_ka_{k+1}=(2k+1)(2k+3)$이다.

R2. 양 끝 항만 남기기

조건

두 분모의 차는 2이다.

사용 과정

$1/((2k+1)(2k+3))=(1/(2k+1)-1/(2k+3))/2$이다. 합은 $(1/3-1/23)/2=10/69$이다.

결과 · 다음 연결

p+q=79이다.

공통과목 19번 해설

19번 | 정답 6 | 3점

R1. 좌우 미분계수 비교

조건

x=1에서 미분가능하다.

사용 과정

왼쪽 미분계수는 2, 오른쪽은 b이므로 b=2이다.

결과 · 다음 연결

기울기가 정해졌고 연속 조건으로 a를 구한다.

R2. 경계 함숫값 연결

조건

$1+a=b+3$이다.

사용 과정

b=2를 넣으면 a=4이다. 이 값에서 좌우 함숫값은 5, 기울기는 2로 일치한다.

결과 · 다음 연결

a+b=6이다.

20번 | 정답 11 | 4점

R1. 한 주기의 해 개수와 전체 구간을 연결한다

조건

$0<1/a<1$이고 b가 자연수이므로 bx의 범위는 0부터 $2b\pi$까지의 정확히 b개 주기이다.

사용 과정

각 주기 내부에 두 해가 있고 양 끝점은 해가 아니므로 전체 해의 수는 $2b=6$이다.

결과 · 다음 연결

$p=b=3$이다.

공통과목 20번 해설

R2. 양 끝 해의 곱으로 기준각을 정한다

조건

$x_1=\theta/3$, $x_6=(5\pi-\theta)/3$이다.

사용 과정

$\theta(5\pi-\theta)/9=29\pi^2/324$에서 $36\theta^2-180\pi\theta+29\pi^2=0$이다. 인수분해하면 $(6\theta-\pi)(6\theta-29\pi)=0$이다. $0<\theta<\pi/2$이므로 $\theta=\pi/6$만 남는다.

결과 · 다음 연결

$q=6$이고 $a=1/\sin(\pi/6)=2$이므로 $r=2$이다. 따라서 $p+q+r=3+6+2=11$이다.

21번 | 정답 283 | 4점

R1. 두 위치의 차를 한 매개변수 함수로 나타낸다

조건

Q는 원점에서 일정한 속도 v로 출발하므로 위치가 vt이다.

사용 과정

위치의 차를 $h_v(t)=t^3-6t^2+(9-v)t$라 하면 $\mathrm{D}(v)=\max_{0\le t\le 4}|h_v(t)|$이다. $v=1$일 때 $h_1(t)=(t-2)^3-4(t-2)$가 되어 $t=2$를 중심으로 값이 반대인 두 극값을 갖는다.

결과 · 다음 연결

대칭인 두 극값의 절댓값을 같게 만드는 후보 $v=1$을 먼저 검사한다.

공통과목 21번 해설

R2. 후보에서 최대거리를 계산한다

조건

$h_1'(t) = 3(t-2)^2 - 4$이다.

사용 과정

임계점은 $t_- = 2 - 2/\sqrt{3}$, $t_+ = 2 + 2/\sqrt{3}$이고 둘 다 $(0, 4)$에 있다. $h_1(t_-) = 16/(3\sqrt{3})$, $h_1(t_+) = -16/(3\sqrt{3})$이며 양 끝값은 모두 0이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{D}(1) = \mathrm{M} = 16/(3\sqrt{3})$이다.

R3. 다른 모든 속도에서 더 작은 최대거리가 불가능함을 보인다

조건

$h_v(t) = h_1(t) + (1-v)t$이고 t_-, t_+는 모두 양수이다.

사용 과정

$0 \le v < 1$이면 $h_v(t_-) > \mathrm{M}$이므로 $\mathrm{D}(v) > \mathrm{M}$이다. $v > 1$이면 $h_v(t_+) < -\mathrm{M}$이므로 역시 $\mathrm{D}(v) > \mathrm{M}$이다. 따라서 모든 허용 v를 비교했을 때 $v = 1$에서만 최소가 된다.

결과 · 다음 연결

$\min \mathrm{D}(v)^2 = 256/27$이다. $p = 27, q = 256$이므로 $p + q = 283$이다.

공통과목 22번 해설

22번 | 정답 22 | 4점

R1. 감소하는 구간과 반복하는 구간을 나눈다

조건

$a_1 = 4q + r$라 놓되 q는 0 이상의 정수, $0 \le r < 4$인 정수이다.

사용 과정

$q \le 10$이고 처음 q개 항은 $4q+r, 4(q-1)+r, \dots, 4+r$이다. 그다음부터는 $r, 4-r, r, 4-r, \dots$가 반복된다. 처음 q개 항의 합은 $2q(q+1)+qr$이다.

결과 · 다음 연결

남은 $20-q$개 항의 합을 q의 홀짝에 따라 계산한다.

R2. 반복 부분의 마지막 항을 반영한다

조건

반복 부분의 인접한 두 항의 합은 4이다.

사용 과정

q가 짝수이면 $S_{20} = 40 + 2q^2 + qr$이다. q가 홀수이면 반복 항이 홀수 개이므로 $S_{20} = 38 + 2q^2 + (q+1)r$이다.

결과 · 다음 연결

$0 \le r \le 3$인 범위에서 $S_{20} = 100$을 만족시키는 q, r를 찾으면 된다.

R3. 가능한 구간을 제한하여 빠짐없이 결정한다

조건

q가 짝수일 때 $q \le 4$이면 합이 84 이하이고 $q \ge 6$이면 112 이상이다.

사용 과정

짝수 q는 불가능하다. 홀수 q에서는 $q \le 3$이면 68 이하이고 $q \ge 7$이면 136 이상이므로 $q = 5$만 가능하다. $38 + 2 \cdot 25 + 6r = 100$에서 $r = 2$이다.

결과 · 다음 연결

$a_1 = 4 \cdot 5 + 2 = 22$이고 실제 20항의 합은 100이다.

확률과 통계 해설

확률과 통계 해설

23번 | 정답 ② | 2점

R1. 순서 없이 두 개 선택

조건

선택 순서는 구별하지 않는다.

사용 과정

경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2 = 8 \cdot 7/2$이다.

결과 · 다음 연결

따라서 28이다.

24번 | 정답 ④ | 3점

R1. 합사건에서 교집합 대입

조건

독립이므로 $\mathrm{P(A \cap B)=P(A)P(B)}$이다.

사용 과정

$\mathrm{P(B)} = p$라 하면 $1/3 + p - p/3 = 2/3$이므로 $\mathrm{p=1/2}$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 1/2이다.

확률과 통계 25번 해설

25번 | 정답 ② | 3점

R1. 표본평균의 표준편차로 표준화

조건

표본평균의 평균은50, 표준편차는10/√25=2이다.

사용 과정

두 경계는 Z=-1,1에 대응한다. 정규분포의 대칭성에서 확률은 2 · 0.3413이다.

결과 · 다음 연결

따라서 0.6826이다.

26번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 옮긴 색에 따라 분류

조건

빨간 공을 옮길 확률은2/3, 파란 공은1/3이다.

사용 과정

빨강을 옮기면 B가 빨강2 · 파랑2여서 서로 다른색 확률은4/6이다. 파랑을 옮기면 빨강1 · 파랑3이어서 확률은3/6이다.

결과 · 다음 연결

두 경로에 원래 이동 확률을 곱한다.

확률과 통계 26번 해설

R2. 관측 사건으로 분모 갱신

조건

분모는 색이 다른 두 공을 얻는 전체 확률이다.

사용 과정

빨강이동과관측의 교집합은 $2/3 \cdot 4/6 = 4/9$, 전체는 $4/9 + 1/3 \cdot 3/6 = 11/18$이다.

결과 · 다음 연결

조건부확률은 $(4/9)/(11/18) = 8/11$이다.

27번 | 정답 ③ | 3점

R1. 변환된 평균과 분산 분리

조건

선형변환에서 평균은3배 후1을 더하고 분산은9배이다.

사용 과정

$np = 4,\ np(1-p) = 2$이므로 $p = 1/2, n = 8$이다.

결과 · 다음 연결

이항분포의 두 매개변수가 정해진다.

R2. 두 번 성공할 확률

조건

$\mathrm{X} \sim \mathrm{B}(8, 1/2)$이다.

사용 과정

$\mathrm{P}(\mathrm{X} = 2) = {}_8\mathrm{C}_2 (1/2)^8 = 28/256$이다.

결과 · 다음 연결

정답은 $7/64$이다.

확률과 통계 28번 해설

28번 | 정답 ① | 4점

R1. 각 함숫값의 등장 횟수 결정

조건

세 값이 모두 등장하고 함숫값의 합은16이다.

사용 과정

1,2,3의 등장 횟수를 a,b,c라 하면 $a+b+c=8$, $a+2b+3c=16$이다. 따라서 a=c이고 가능한 (a,b,c)는 $(1,6,1),(2,4,2),(3,2,3)$이다.

결과 · 다음 연결

마지막 두 값의 공통값을 고정하여 센다.

R2. 같은 마지막 두 값을 제거한 배열 계산

조건

$f(7)=f(8)$이다.

사용 과정

그 공통값을 j라 하고 남은 각 값의 개수를 r1,r2,r3라 하자. 앞 여섯 자리의 전체 배열 수에서 첫 두 값이 같은 배열 수를 빼면 $f(1)\neq f(2)$인 수이다. 값1과2를 서로 바꾸는 것이 아니라 첫 두 자리의 위치를 바꾸면 부등호 방향이 서로 바뀌므로 그 수의 절반을 취한다.

결과 · 다음 연결

각 구성에서 마지막 공통값 j를 고정한 뒤, 남은 여섯 자리의 전체 순열 수에서 첫 두 값이 같은 순열 수를 빼고 2로 나눈다.

확률과 통계 28번 해설

R3. 세 구성의 결과 더하기

조건

구성별로 마지막 공통값의 가능한 경우를 빠짐없이 합친다.

사용 과정

(1,6,1)은 마지막 공통값2일 때9개이다. (2,4,2)는 공통값1,2,3일 때 각각4,36,4개이다. (3,2,3)은 각각22,6,22개이다. 예를 들어(2,4,2)에서공통값2이면 남은(2,2,2)의90개에서 첫두값이같은18개를빼고2로나누어36개이다.

결과 · 다음 연결

전체는 103개이다.

29번 | 정답 14 | 4점

R1. 합이 0인 사건으로 후보 구하기

조건

X의 평균은 대칭성에 의해0이다.

사용 과정

$\mathrm{P}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2=0)=(1-2p)^2+2p^2=3/8$이다. 따라서 $48p^2-32p+5=0$, $p=1/4$ 또는5/12이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{V}(\mathrm{X})=2p<2/3$이므로 p=1/4이다.

R2. 조건 사건과 분자 사건 구별

조건

X의 세 확률은1/4,1/2,1/4이다.

사용 과정

합이0일 확률이3/8이고 합의 분포가0에대해대칭이므로 $\mathrm{P}(\mathrm{X}_1+\mathrm{X}_2\geq 0)=(1+3/8)/2=11/16$이다. 동시에 X1<X2인 쌍은(-1,1),(0,1)로 확률은1/16+1/8=3/16이다.

결과 · 다음 연결

확률은3/11이므로 q+r=14이다.

확률과 통계 30번 해설

30번 | 정답 29 | 4점

R1. 앞면 묶음과 뒷면 사이의 빈칸 표현

조건

앞면5개를 양의 크기인3묶음으로 나누어야 한다.

사용 과정

앞면 묶음의 크기를 정하는 방법은 ${}_4C_2=6$이다. 뒷면7개는 묶음 앞, 사이2곳, 뒤의4곳에 놓인다. 사이2곳에 하나씩 먼저 놓으면 나머지5개를4곳에 배분하므로 ${}_8C_3=56$가지이다.

결과 · 다음 연결

조건 사건에는$6\times56=336$개 순서가 있다.

R2. 어느 면도 세 번 이어지지 않는 제한

조건

앞면의 각 묶음 크기와 뒷면의 각 빈칸 개수가 모두2이하여야 한다.

사용 과정

앞면 묶음은 (1,2,2)의 순서를 정하는3가지이다. 뒷면7개를4곳에 각각2이하로 넣으려면 (1,2,2,2)밖에 없으므로1인 위치를 정하는4가지이다. 이 경우 사이 빈칸도 양수이다.

결과 · 다음 연결

원하는 순서는$3\times4=12$개이다.

R3. 같은 확률의 순서 수로 나누기

조건

12번 동전의 각 순서는 같은 확률이다.

사용 과정

조건부확률은$12/336=1/28$이다.

결과 · 다음 연결

$p+q=29$이다.

미적분 해설

23번 | 정답 ① | 2점

R1. 가장 빠르게 증가하는 항으로 나누기

조건

2^n으로 분자와 분모를 나눈다.

사용 과정

식은 $(3+5/2^n)/(2-1/2^n)$이고 $2^{-n}\to 0$이다.

결과 · 다음 연결

극한은$3/2$이다.

24번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 안쪽 함수의 미분계수 곱하기

조건

지수의 안쪽 함수는 x^2 -1이다.

사용 과정

$f'(x)=2xe^{x^2-1}$이므로 x=1에서2이다.

결과 · 다음 연결

따라서2이다.

미적분 25번 해설

25번 | 정답 ② | 3점

R1. 코사인의 부호가 바뀌는 점으로 분류

조건

sin x는 구간 전체에서0이상이며 cos x는π /2에서부호가바뀐다.

사용 과정

두 구간을 나누고 $u = \cos x$로 치환하면 각각1/2이다. 전체는1이다.

결과 · 다음 연결

따라서1이다.

26번 | 정답 ⑤ | 3점

R1. 출력값에 대응하는 입력 찾기

조건

$f(2) = 2 + \log_e 2$이다.

사용 과정

$f'(x) = 1 + 1/x$이므로 $f'(2) = 3/2$이다. 역함수의 미분계수는 대응하는 점에서의 미분계수의 역수이다.

결과 · 다음 연결

정답은2/3이다.

미적분 27번 해설

27번 | 정답 ③ | 3점

R1. 길이 공식의 제곱근 단순화

조건

x>0인 구간이다.

사용 과정

$y' = (x-1)/(2\sqrt{x})$이므로 $1+(y')^2 = (x+1)^2/(4x)$이다. 제곱근은 $(x+1)/(2\sqrt{x})$이다.

결과 · 다음 연결

절댓값을 해소할 때 x+1>0을 사용했다.

R2. 길이를 적분

조건

길이는 $\int_1^4 (\sqrt{x}+1/\sqrt{x})/2\,dx$이다.

사용 과정

원시함수는 $x^{3/2}/3+\sqrt{x}$이다. 끝값의 차는 $(8/3+2)-(1/3+1)$이다.

결과 · 다음 연결

정답은10/3이다.

미적분 28번 해설

28번 | 정답 ① | 4점

R1. 누적량을 하나의 함수로 놓기

조건

$\mathrm{F}(x)=\int_0^x f(t)\,dt$라 하면 $\mathrm{F}'=f$, $\mathrm{F}(0)=0$이다.

사용 과정

주어진 식에서 $\mathrm{F}'(x)\mathrm{F}(x)=x+x^2$이다. 따라서 $\mathrm{F}(x)^2$의 도함수는 $2x+2x^2$이다. 적분상수는 $\mathrm{F}(0)=0$에서 0이다.

결과 · 다음 연결

$\mathrm{F}(x)^2=x^2+\frac{2}{3}x^3$이다.

R2. 함수와 대응점 복원

조건

f가 양수이므로 $x>0$에서 F도 양수이다.

사용 과정

$\mathrm{F}(x)=x\sqrt{1+2x/3}$이다. 미분하면 $f(x)=(1+x)/\sqrt{1+2x/3}$이다. $x=3/2$를 넣으면 $f(3/2)=5\sqrt{2}/4$이다. 증가성에서 이 대응점은 유일하다.

결과 · 다음 연결

$g(5\sqrt{2}/4)=3/2$이다.

R3. 원래 함수의 두 미분계수 구하기

조건

$s=1+2x/3$이라 잠시 쓰자.

사용 과정

$f'(x)=(x+2)/(3s^{3/2})$, $f''(x)=-(x+3)/(9s^{5/2})$이다. $x=3/2$에서 각각 $7/(12\sqrt{2})$, $-1/(8\sqrt{2})$이다.

결과 · 다음 연결

이 두 값이 역함수의 이계도함수 계산에 들어간다.

미적분 28번 해설

R4. 역함수 관계를 두 번 미분

조건

$f(g(y))=y$이다.

사용 과정

한 번 미분하면 $f'(g(y))g'(y)=1$이다. 다시 미분하면 $f''(g(y))(g'(y))^2+f'(g(y))g''(y)=0$이다. 따라서 대응점에서 $g''=-f''/(f')^3$이다.

결과 · 다음 연결

$g''(5\sqrt{2}/4)=432/343$이다.

29번 | 정답 199 | 4점

R1. 가중 등비급수와 부호 기준 준비

조건

부호가 바뀌는 a의 값은 $(3/2)^n$이다.

사용 과정

$\mathrm{T}=\sum_{n=1}^{\infty} nr^n$에서 $r\mathrm{T}$를 빼면 $(1-r)\mathrm{T}=\sum_{n=1}^{\infty} r^n=r/(1-r)$이다. 따라서 $\mathrm{T}=r/(1-r)^2$이다. 두 가중급수의 합은 각각 2, $3/4$이다.

결과 · 다음 연결

절댓값을 모두 양수로 읽은 기본식은 $2-3a/4$이며 음수인 항은 두 배를 보정한다.

미적분 29번 해설

R2. 앞 두 경계까지 분류

조건

첫 경계는 $3/2$, 둘째는 $9/4$, 셋째는 $27/8$이다.

사용 과정

$0 < a \le 3/2$에서는 합이 $2 - 3a/4$이므로 $a = 4/3$이다. $3/2 \le a \le 9/4$에서는 첫째항만 보정하여 합이 $1 - a/12$이다. 이 범위의 합은 1보다 작으므로 해가 없다.

결과 · 다음 연결

$9/4 \le a \le 27/8$에서는 첫째 · 둘째항을 보정하면 합이 $13a/36$이다. 따라서 $a = 36/13$이다.

R3. 이후에 해가 더 없음을 확인

조건

$a \ge 9/4$에서 첫 두 항은 0 이하이다.

사용 과정

a가 $\delta > 0$만큼 증가하면 첫 두 절댓값의 가중합은 $(1/3 + 2/9)\delta = 5\delta/9$만큼 증가한다. 나머지 감소량은 최대 $(3/4 - 5/9)\delta = 7\delta/36$이다. 전체는 적어도 $13\delta/36$만큼 증가한다.

결과 · 다음 연결

$a = 27/8$에서의 합은 $39/32 > 1$이므로 그 이후 해는 없다.

R4. 두 해를 더하기

조건

두 해 $4/3$, $36/13$은 각각 가정한 범위에 있다.

사용 과정

합은 $4/3 + 36/13 = 160/39$이다. 두 정수는 서로소이다.

결과 · 다음 연결

$p + q = 199$이다.

미적분 30번 해설

30번 | 정답 3 | 4점

R1. 원래 함수의 꼭짓값과 끝값 확인

조건

$f'(x)=e^{-x}(1-x)$이다.

사용 과정

f는 $[0,1]$에서 증가하고 $[1,3]$에서 감소한다. $f(0)=0$, $f(1)=\mathrm{M}=1/e$, $f(3)=\mathrm{B}=3/e^{3}$이다. 또한 $\mathrm{B}<\mathrm{M}/2<a<\mathrm{M}$이다.

결과 · 다음 연결

높이 a는 두 가지에 걸치므로 절댓값 그래프는 두 영점을 갖는다.

R2. 근의 개수가 바뀌는 양의 높이 찾기

조건

절댓값 그래프의 양의 끝값과 꼭짓값을 비교한다.

사용 과정

$x=0$의 높이는 a, $x=3$의 높이는 $a-\mathrm{B}$, $x=1$의 높이는 $\mathrm{M}-a$이다. 각 높이를 지나면 끝점의 근이 사라지거나 두 근이 합쳐졌다가 사라진다. 이 세 값 밖에서는 근의 개수가 변하지 않는다.

결과 · 다음 연결

$a>\mathrm{M}/2$이므로 $a>\mathrm{M}-a$이고 $a>a-\mathrm{B}$이다. 양의 불연속점이 2개이려면 $a-\mathrm{B}=\mathrm{M}-a$이어야 한다.

R3. 높이의 합류가 실제 두 불연속점인지 검사

조건

$2a=\mathrm{M}+\mathrm{B}$이다.

사용 과정

공통 높이 $c=a-\mathrm{B}=\mathrm{M}-a$의 아래에서는 네 근, c에서는 세 근, 그 위에서는 한 근이다. $t=a$에서는 끝점 $x=0$ 하나, 그 위에서는 0개이므로 두 곳 모두 불연속이다.

결과 · 다음 연결

$e^{3}(2a-e^{-1})=e^{3}\mathrm{B}=3$이다.

기하 해설

23번 | 정답 ① | 2점

R1. 수선의 발 확인

조건

xy평면에서는 z좌표가0이다.

사용 과정

수선의 발은(2,-1,0)이므로 z좌표의 차의 절댓값이 거리이다.

결과 · 다음 연결

따라서5이다.

24번 | 정답 ④ | 3점

R1. 제곱을 내적으로 전개

조건

벡터의 제곱 길이는 자기 자신과의 내적이다.

사용 과정

$|2\vec{a}-\vec{b}|^2=4|\vec{a}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=36-24+16$이다.

결과 · 다음 연결

따라서28이다.

기하 25번 해설

25번 | 정답 ② | 3점

R1. 접선 공식에 접점 대입

조건

$y^2=4px$에서 p=2이다.

사용 과정

접선식 $4y=2p(x+2)$에 p=2를 넣으면 y=x+2이다.

결과 · 다음 연결

y절편은2이다.

26번 | 정답 ④ | 3점

R1. 거리의 합과 차로 x좌표 구하기

조건

타원의 장축 길이는10이다.

사용 과정

$PF_1=7$이다. P=(x,y)라 하면 $(x+4)^2+y^2=49$, $(x-4)^2+y^2=9$이고 차에서16x=40이다.

결과 · 다음 연결

x=5/2이다.

R2. 높이를 복원하여 넓이 계산

조건

타원식과 제1사분면 조건을 사용한다.

사용 과정

$y^2=9(1-1/4)=27/4$, $y=3\sqrt{3}/2$이다. 밑변은8이다.

결과 · 다음 연결

넓이는8y/2=6√3이다.

기하 27번 해설

27번 | 정답 ③ | 3점

R1. 삼각형과 정사영의 넓이 비교

조건

OA와 OB는 수직이다. B의 정사영은 $B'=(0,3,0)$이다.

사용 과정

OAB의 넓이는$4\times5/2=10$, OA B' 의 넓이는$4\times3/2=6$이다.

결과 · 다음 연결

정사영 넓이=원래 넓이$\times\cos\theta$ 이다.

R2. 각의 범위 확인

조건

θ 는 두 평면이 이루는 예각이다.

사용 과정

$\cos\theta=6/10=3/5$이다. 부호는양수이다.

결과 · 다음 연결

정답은$3/5$이다.

기하 28번 해설

28번 | 정답 ① | 4점

R1. 길이 조건을 원으로, 내적 조건을 영역으로 옮기기

조건

P=(x,y)라 놓는다.

사용 과정

첫 조건에서 $2(x^2+y^2)+8=40$이므로 $x^2+y^2=16$이다. 두 번째 조건은 $(x+2)x+y(y-4)\le 0$, 즉 $16+2x-4y\le 0$이다.

결과 · 다음 연결

P는 반지름4인 원 위에서 y≥4+x/2인 부분에 있다.

R2. 허용되는 호의 경계 찾기

조건

직선 y=4+x/2와 원의 교점을 구한다.

사용 과정

대입하면 $5x^2/4+4x=0$이어서 x=0 또는 -16/5이다. 허용되는 위쪽 호의 x범위는 -16/5≤x≤0이다.

결과 · 다음 연결

$PB^2=x^2+y^2-4x+4=20-4x$이므로 x가최소일때최대이다.

R3. 경계 후보를 다시 확인

조건

x=-16/5,y=12/5는 두 조건의 등호를 만족한다.

사용 과정

$5PB^2=5(20+64/5)=164$이다.

결과 · 다음 연결

최댓값은164이다.

기하 29번 해설

29번 | 정답 53 | 4점

R1. 접선의 두 절편을 넓이에 연결

조건

P=(u,v), u,v>0이다.

사용 과정

접선은 ux/25+vy/9=1이다. 두 절편은25/u,9/v이므로 넓이225/(2uv)=25에서 uv=9/2이다.

결과 · 다음 연결

타원식과 좌표곱을 함께 사용한다.

R2. 좌표의 두 후보를 범위로 고르기

조건

v^2 =9-9u^2 /25이고 u^2 v^2 =81/4이다.

사용 과정

z=u^2 라 놓으면 $4z^2-100z+225=0$이다. 따라서 z=45/2 또는5/2이다. 각각 v^2 =9/10 또는81/10이고, u>v에서 첫 후보만 남는다.

결과 · 다음 연결

u^2 +v^2 =117/5이고 초점의 x좌표는±4이다.

R3. 두 거리의 곱 계산

조건

두 거리제곱은 u^2 +v^2 +16에 ±8u를 더한 값이다.

사용 과정

곱의 제곱은 $(117/5+16)^2-64(45/2)=2809/25$이다. 거리는양수이므로 곱은53/5이다.

결과 · 다음 연결

구하는 값은53이다.

기하 30번 해설

30번 | 정답 141 | 4점

R1. 구면 조건과 직각 조건 합류

조건

점 P의 좌표를 (x, y, z)라 놓는다. $\mathrm{OP}=3$이므로 $x^2+y^2+z^2=9$이다.

사용 과정

$\angle \mathrm{APB}=\pi/2$이므로 피타고라스 정리에 따라 $\mathrm{PA}^2+\mathrm{PB}^2=\mathrm{AB}^2=25$이다. 공간에서 두 점 사이의 거리 공식으로 이를 쓰면 $(x-4)^2+y^2+z^2+x^2+(y-3)^2+z^2=25$이다.

전개한 식에 $x^2+y^2+z^2=9$를 대입하면 $18-8x-6y=0$, 즉 $4x+3y=9$이다.

결과 · 다음 연결

$y=(9-4x)/3$이다. 이 식을 $x^2+y^2+z^2=9$에 넣어 높이 $|z|$의 범위를 구한다.

R2. x의 범위에서 높이 범위 얻기

조건

$x \geq 12/5$이다.

사용 과정

$z^2=9-x^2-(9-4x)^2/9=8x-25x^2/9$이다. 이 이차식은 $x \geq 12/5$에서감소하므로 $0 \leq z^2 \leq 16/5$이다. x=12/5,y=-1/5,z=$\pm 4/\sqrt{5}$에서 상한이 실제로 가능하다.

결과 · 다음 연결

높이의 제곱이0부터16/5사이로 제한된다.

R3. 사영 삼각형의 넓이 최적화

조건

PH=|z|, OH^2 =9-z^2 이고 두 변은수직이다.

사용 과정

넓이의 제곱은 $z^2(9-z^2)/4$이다. w=z^2 라 놓으면 이 식은$0 \leq w \leq 16/5$에서증가한다. 따라서 최댓값은 $(16/5)(29/5)/4=116/25$이다.

결과 · 다음 연결

p+q=141이다.